



Hinweis: Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar sein. Du musst also auch erklären, wie du zu Ergebnissen und Teilergebnissen gelangt bist. Stelle deinen Lösungsweg logisch korrekt und in grammatisch einwandfreien Sätzen dar.

631013

Von den Zahlen 2023, 2024 und 2025 ist die erste durch die Quadratzahl 289, die zweite durch die Quadratzahl 4 und die dritte durch die Quadratzahl 25 teilbar.

- Geben Sie drei weitere Beispiele für jeweils drei aufeinanderfolgende natürliche Zahlen an, die jeweils Vielfaches einer Quadratzahl größer als 1 sind.
- Zeigen Sie: Es gibt sogar unendlich viele Beispiele für drei aufeinanderfolgende natürliche Zahlen, die jeweils Vielfaches einer Quadratzahl größer als 1 sind.
- Finden Sie ein Beispiel mit vier aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen, die jeweils Vielfaches einer Quadratzahl größer als 1 sind.

631014

Um eine Gleichung zu lösen, bei der die Lösungsvariable im Radikanden einer Wurzel vorkommt, ist es empfehlenswert, die Gleichung zu quadrieren.

Beispiel 1:

$$\sqrt{2x + 1} = -7.$$

Es muss $x \geq -0,5$ sein, damit die Wurzel definiert ist.

Quadrieren auf beiden Seiten der Gleichung führt zu $2x + 1 = 49$. Diese Gleichung hat die Lösung $x = 24$. Setzt man diese Zahl in die Ausgangsgleichung ein, so stellt man fest, dass 24 keine Lösung ist.

Merke: Quadrieren ist keine Äquivalenzumformung. Es *kann* zu Scheinlösungen führen.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

631015

- a) In der Ebene sind zwei Punkte A und B gegeben. Bestimmen Sie alle Punkte P der Ebene, für welche die Summe der Abstände

$$|\overline{AP}| + |\overline{BP}|$$

des Punktes P zu den Punkten A und B minimal (also so klein wie möglich) wird. Geben Sie den minimalen Wert an.

- b) In der Ebene ist ein Quadrat $ABCD$ gegeben. Bestimmen Sie alle Punkte P der Ebene, für welche die Abstandssumme

$$|\overline{AP}| + |\overline{BP}| + |\overline{CP}| + |\overline{DP}|$$

minimal wird.

631016

- a) Fünf Städte sollen durch Straßen miteinander verbunden werden, sodass man von jeder Stadt aus jede andere erreichen kann. Dabei führt jede Straße von einer Stadt zu einer anderen, ohne dass sich die Straßen überschneiden (kreuzungsfreies Bauen soll möglich sein – notfalls mit Brücken).

Wie viele Straßen muss man wenigstens bauen?

- b) Nun sollen 2023 Städte miteinander wie in a) beschrieben verbunden werden. Dabei soll zusätzlich gelten, dass je zwei dieser Städte auf genau eine Weise über einen Weg aus einer oder mehreren Straßen verbunden sind. Als Weg bezeichnen wir dabei eine Fahrtroute zwischen zwei (verschiedenen) Städten, die gegebenenfalls über eine oder mehrere weitere Städte führt, wobei jede dieser weiteren Städte genau einmal durchfahren wird.

Wie viele Straßen (direkte Verbindungen zwischen zwei Städten) hat ein solches Straßennetz?