



© 2023 Aufgabenausschuss für die Mathematik-Olympiade in Deutschland  
www.mathematik-olympiaden.de. Alle Rechte vorbehalten.

Hinweis: Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar sein. Du musst also auch erklären, wie du zu Ergebnissen und Teilergebnissen gelangt bist. Stelle deinen Lösungsweg logisch korrekt und in grammatisch einwandfreien Sätzen dar.

631011

a) Für die Zahl  $a$  gelte

$$a = 444\,444\,444\,444\,445^2 - 444\,444\,444\,444\,444^2 + 111\,111\,111\,111\,111$$

und für die Zahl  $b$

$$b = 544\,444\,444\,444\,444^2 - 444\,444\,444\,444\,444^2 + 111\,111\,111\,111\,111.$$

Berechnen Sie die Quersummen von  $a$  und  $b$ .

b) Zu einer gegebenen positiven ganzen Zahl  $s$  betrachten wir nun die  $s$ -stellige natürliche Zahl  $k$ , deren Zifferndarstellung aus  $s$  Einsen besteht, also  $k = \underbrace{1\dots1}_{s\text{-mal}}$ , sowie die ebenfalls  $s$ -stellige natürliche Zahl  $m = 4k = \underbrace{4\dots4}_{s\text{-mal}}$ .

Nun ersetzen wir eine beliebige der Ziffern von  $m$  durch die Ziffer 5 und erhalten die Zahl  $n$ ; es sind also  $s$  verschiedene Werte für  $n$  möglich. Zu jedem dieser Werte bilden wir analog zur obigen Teilaufgabe die Zahl  $c$  mit

$$c = n^2 - m^2 + k.$$

Ermitteln Sie die Anzahl der Werte, welche die Quersummen dieser Zahlen  $c$  in Abhängigkeit von der Stellenzahl  $s$  annehmen können.

631012

Gegeben sind vier Geraden durch ihre Gleichungen.

$$g_1: y = \frac{2}{9} \cdot x + \frac{5}{9},$$

$$g_2: y = \frac{7}{6} \cdot x - \frac{59}{6},$$

$$g_3: 7 \cdot x - 6 \cdot y = 8,$$

$$g_4: 2 \cdot x - 9 \cdot y = -56.$$

Klassifizieren Sie das konvexe Vieleck so genau wie möglich, das durch die Schnittpunkte dieser vier Geraden bestimmt ist.

*Hinweis:* Klassifizieren bedeutet hier zu klären, wie viele Ecken das Vieleck hat und ob es besondere Eigenschaften bezüglich der Seiten oder Winkel gibt, sodass dem Vieleck eine besondere Bezeichnung (zum Beispiel: gleichseitiges Dreieck, Rechteck, gleichwinkliges Sechseck) zugewiesen werden kann.

Auf der nächsten Seite geht es weiter!

631015

- a) In der Ebene sind zwei Punkte  $A$  und  $B$  gegeben. Bestimmen Sie alle Punkte  $P$  der Ebene, für welche die Summe der Abstände

$$|\overline{AP}| + |\overline{BP}|$$

des Punktes  $P$  zu den Punkten  $A$  und  $B$  minimal (also so klein wie möglich) wird. Geben Sie den minimalen Wert an.

- b) In der Ebene ist ein Quadrat  $ABCD$  gegeben. Bestimmen Sie alle Punkte  $P$  der Ebene, für welche die Abstandssumme

$$|\overline{AP}| + |\overline{BP}| + |\overline{CP}| + |\overline{DP}|$$

minimal wird.

631016

- a) Fünf Städte sollen durch Straßen miteinander verbunden werden, sodass man von jeder Stadt aus jede andere erreichen kann. Dabei führt jede Straße von einer Stadt zu einer anderen, ohne dass sich die Straßen überschneiden (kreuzungsfreies Bauen soll möglich sein – notfalls mit Brücken).

Wie viele Straßen muss man wenigstens bauen?

- b) Nun sollen 2023 Städte miteinander wie in a) beschrieben verbunden werden. Dabei soll zusätzlich gelten, dass je zwei dieser Städte auf genau eine Weise über einen Weg aus einer oder mehreren Straßen verbunden sind. Als Weg bezeichnen wir dabei eine Fahrtroute zwischen zwei (verschiedenen) Städten, die gegebenenfalls über eine oder mehrere weitere Städte führt, wobei jede dieser weiteren Städte genau einmal durchfahren wird.

Wie viele Straßen (direkte Verbindungen zwischen zwei Städten) hat ein solches Straßennetz?