Olympiadeklasse 9

**62. Mathematik-Olympiade**
**1. Runde (Schulrunde)**
**Aufgaben**



1. Aufgabe

a) Ermittle die kleinste positive ganze Zahl $z$, für die sowohl $z$ als auch die Quersumme $Q(z)$ durch 2, durch 3 und durch 5 teilbar sind.
b) Ermittle die kleinste positive ganze Zahl $z$, für die sowohl $z$ als auch die Quersumme $Q(z)$ durch 2, 3, durch 4 und durch 5 teilbar sind.

2. Aufgabe
In einem konvexen Fünfeck $ABCDE$ seien $u$ die Summe der Seitenlängen (also der Umfang des Fünfecks) und $d$ die Summe der Diagonalenlängen.

a) Zeige, dass stets $d < 2u$ gilt.
b) Zeige, dass stets $u < d$ gilt.

*Hinweis:* Ein Fünfeck ist konvex, wenn alle seine Diagonalen mit Ausnahme der Endpunkte im Inneren des Fünfecks verlaufen.

Für die Lösung dieser Aufgabe ist die Dreiecksungleichung hilfreich.

3. Aufgabe
2022 Piraten haben auf einer Insel einen Schatz, bestehend aus 10 000 Kokosnüssen, erbeutet. Sie wollen jetzt die Kokosnüsse einigermaßen gerecht unter sich aufteilen und gehen dazu wie folgt vor:

Alle Kokosnüsse werden auf einen Haufen gelegt und alle Piraten stellen sich in einer Schlange auf. Der Reihe nach geht jeweils der erste Pirat aus der Schlange zum Kokosnusshaufen, teilt die Anzahl der noch verbliebenen Kokosnüsse durch die Anzahl der verbliebenen Piraten, zu denen er selber auch gehört, rundet das Ergebnis auf die nächstgelegene ganze Zahl auf oder ab, nimmt sich entsprechend viele Kokosnüsse und segelt mit ihnen nach Hause. Dann ist der nächste Pirat dran und so weiter.

Bestimme, wie viele Kokosnüsse

a) die ersten drei Piraten,
b) die Piraten, die am Anfang an 1803. und 1804. Stelle stehen,

erhalten.

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar sein. Du musst also auch erklären, wie du zu Ergebnissen und Teilergebnissen gelangt bist. Stelle deinen Lösungsweg logisch korrekt und in grammatisch einwandfreien Sätzen dar.*

Olympiadeklassen 10

# 61. Mathematik-Olympiade
## 1. Runde (Schulrunde)
## Aufgaben



1. Aufgabe

a) Ermitteln Sie die kleinste positive ganze Zahl $z$, für die sowohl $z$ als auch die Quersumme $Q(z)$ durch 2, durch 3 und durch 5 teilbar sind.

b) Ermitteln Sie die kleinste positive ganze Zahl $z$, für die sowohl $z$ als auch die Quersumme $Q(z)$ durch 2, durch 3, durch 4 und durch 5 teilbar sind.

2. Aufgabe

In dieser Aufgabe betrachten wir Summen von Quadratzahlen. Die kleinste der hier betrachteten Quadratzahlen soll die Eins mit $1 = 1 \cdot 1 = 1^2$ sein. Die nächstgrößeren sind dann 4 wegen $4 = 2 \cdot 2 = 2^2$ und 9 wegen $9 = 3 \cdot 3 = 3^2$ usw.

a) Vereinfachen Sie den Term

$$\left(a^2 + b^2 - c^2\right)^2 + (2ac)^2 + (2bc)^2 - \left(a^2 + b^2 + c^2\right)^2 .$$

b) Geben Sie ein Beispiel an, bei dem die Summe von drei Quadratzahlen wieder eine Quadratzahl ist. Dabei darf eine Quadratzahl auch mehrfach als Summand auftreten.

c) Geben Sie ein Beispiel an, bei dem die Summe von 2022 Quadratzahlen wieder eine Quadratzahl ist. Auch hier darf eine Quadratzahl mehrfach als Summand auftreten.

*Hinweis:* Es gibt für den Aufgabenteil c) auch Beispiele, bei denen alle Summanden paarweise verschieden sind. Finden Sie ein Beispiel?

3. Aufgabe

In einen Halbkreis mit Mittelpunkt $M$ über dem Durchmesser $\overline{UV}$ mit $\left|\overline{UV}\right| = 12$ sei ein Quadrat $ABCD$ eingezeichnet, wobei $A$ und $B$ auf dem Durchmesser sowie $C$ und $D$ auf dem Halbkreis liegen. Weiter sei ein Quadrat $BEFG$ eingezeichnet, wobei $B$ zwischen $M$ und $E$ auf dem Durchmesser $\overline{UV}$, $F$ auf dem Halbkreis und $G$ auf der Strecke $\overline{BC}$ liegen.

a) Konstruieren Sie eine solche Figur und begründen Sie Ihr Vorgehen.

b) Bestimmen Sie den Flächeninhalt $\mathrm{A}_{ABCD}$ des Quadrats $ABCD$.

c) Zeigen Sie, dass $\mathrm{A}_{ABCD} = 4 \cdot \mathrm{A}_{BEFG}$ gilt.

*Hinweis:* Die Zeichnung darf auch mit Hilfe eines geeigneten Computerprogramms angefertigt werden.

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*

Olympiadeklassen 11–12

**62. Mathematik-Olympiade**
**1. Runde (Schulrunde)**
**Aufgaben**



1. Aufgabe

Die Zahl 21212 hat eine besondere Eigenschaft. Für ihre Quersumme und ihr Querprodukt gilt

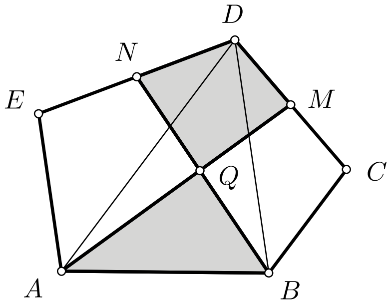
$$2 + 1 + 2 + 1 + 2 = 8 = 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2\,.$$

Man ermittle, wie viele fünfstellige positive ganze Zahlen existieren, für die Quersumme und Querprodukt den gleichen Wert ergeben.

2. Aufgabe

Im konvexen Fünfeck $ABCDE$ ist die Seite $\overline{BC}$ parallel zur Diagonalen $\overline{AD}$, und die Seite $\overline{AE}$ ist parallel zur Diagonalen $\overline{BD}$. Die Punkte $M$ und $N$ sind die Mittelpunkte der Seiten $\overline{CD}$ beziehungsweise $\overline{DE}$. Der Punkt $Q$ ist der Schnittpunkt der Strecken $\overline{AM}$ und $\overline{BN}$.

Man beweise, dass das Viereck $MDNQ$ und das Dreieck $ABQ$ flächengleich sind (Abbildung).




3. Aufgabe

Eine aus 27 Kindern bestehende Schulklasse besucht einen Freizeitpark. Eine der Attraktionen ist ein regelmäßiges 77-Eck, in dessen Ecken jeweils ein steinerner Turm mit nur einem Fenster steht. Die Mauern sind dick und die Fenster so schmal, dass man daraus von allen anderen Türmen nur die Fenster der 26 Türme sehen kann, die am weitesten entfernt sind.

Die Kinder verteilen sich auf beliebige 27 der 77 Türme.

Man beweise, dass es stets zwei Kinder gibt, die sich gegenseitig sehen können.

Hinweis: *Der Lösungsweg mit Begründungen und Nebenrechnungen soll deutlich erkennbar in logisch und grammatisch einwandfreien Sätzen dargestellt werden. Zur Lösungsgewinnung herangezogene Aussagen sind zu beweisen, falls sie nicht aus dem Schulunterricht bekannt sind. Auf eine Beweisangabe kann außerdem verzichtet werden, wenn die Aussage einen eigenen Namen besitzt und dadurch als allgemein bekannt angesehen werden kann.*